

ローレンツモデルと新しいモデルにおける 乱雑挙動に到る枝分れについて

森 岡 望*・清水 敏 寛**

On the Bifurcation Leading to Chaotic Motions in the Lorenz Model and a New Model

By Nozomi Morioka* and Toshihiro Shimizu**

Synopsis: A new interpretation of the Lorenz model is given. A new model is proposed. The results of computer simulation of two models are shown. The bifurcation of limit cycles in high Rayleigh numbers is studied theoretically by using perturbation theory. The result is compared with that of computer simulation. The structure of strange attractor of the new model is discussed briefly.

要旨: ローレンツ方程式の書き換えと新しいモデルの提案がなされている。ローレンツ方程式および新しいモデルのコンピュータシミュレーションの結果が示されている。

高レーリー数におけるリミットサイクルの枝分れが摂動論を使って理論的に調べられ、コンピュータシミュレーションの結果と比較されている。

新しいモデルにおけるストレンジアトラクタの構造について簡単に言及されている。

1. はじめに

最近、統計力学の分野で、決定論的方程式の解が示す乱雑挙動が注目されている。従来、物理系に統計的な解釈を導入する場合には、その系に作用しているランダムな力が大きな役割を演ずる。ところが系の時間発展が非線形決定論的方程式に従う、いくつかの系では、ランダムな力なしに乱雑挙動が観測されている。従ってランダムな力とは無関係に統計的解釈を導入出来る可能性がある。それ故、ランダムな力なしに系に現われる乱雑挙動の研究は非常に興味があり、かつ統計力学の基礎として重要である。

この種の乱雑挙動は多くの異なった系、例えば流体力学系¹⁾、生物系²⁾、化学反応系³⁾、電気回路⁴⁾等において観察されている。これらの中で、最初にこの現象に注目したのはローレンツである。2つの平行板にはさまれた

液体を下から熱した時に生ずる熱伝導から対流、そして乱流へ移る現象を説明する一つのモデルとしてローレンツはナビエーストークス方程式から、次のような3元の一階連立方程式を導いた⁵⁾。

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\sigma[X(t) - Y(t)], \\ \dot{Y}(t) = -X(t)Z(t) + rX(t) - Y(t), \\ \dot{Z}(t) = X(t)Y(t) - bZ(t), \end{cases} \quad (1)$$

これらの式は3つのパラメータを含んでいるが、 σ はプラントル数、 r はレーリー数、そして b は対流解の形についての幾何学的定数である。

このローレンツ方程式(1)は注目すべき特性をもっている。それは、方程式が決定論的方程式であり、またランダムな力をもたないにもかかわらず、 r が臨界レーリー数 $r_T = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ を越すと、解の時間特性は乱雑挙動と呼ばれる非周期的ふるまいを示す。

本論文の目的はローレンツモデルと新しいモデルにおいて、周期解から乱雑挙動を示す解に到る、解の枝分れを調べることである。

論文の構成は以下のようになっている。2節ではローレンツ方程式の書き換えと、新しいモデルの説明がなさ

* 電気工学科 助教授

Assistant Professor, Electrical Engineering Division

** 物理教室助教授、理学博士

Assistant Professor, Division of Physics, Dr. Sci.

れている。3節ではローレンツ方程式についてのコンピュータシミュレーションの結果が述べられている。高レーリー数の場合にはローレンツ方程式を摂動論を使って解くことが出来るが、その理論的結果とシミュレーションの結果が3節の終わりで比較されている。4節では新しいモデルについてのコンピュータシミュレーションの結果と理論計算の結果とが比較されている。5節では新しいモデルのストレンジアトラクタの構造について簡単に言及されている。最後の節はまとめにあてられている。

2. ローレンツ方程式の新しい記述

最初に、次のようにローレンツ方程式(1)を書き換える⁶⁾。

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = -\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\dot{x}(\tau) + f \\ \dot{m}(\tau) = \varepsilon\left[-\frac{b}{\sigma}m(\tau) + \left(2 - \frac{b}{\sigma}\right)x(\tau)^2\right] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \tau &\equiv t\sigma\sqrt{r-1}, \quad x(\tau) \equiv X(t)/\sqrt{2\sigma(r-1)}, \\ m(\tau) &\equiv Z(t)/(r-1) - x(\tau)^2, \quad \varepsilon \equiv 1/\sqrt{r-1}, \\ f &= -x(\tau)[x(\tau)^2 - 1 + m(\tau)]/\sigma \end{aligned}$$

である。

ローレンツ方程式のこの書き換えは、2つの長所をもっている。

1) ローレンツ方程式に従う運動を、時間に従属する力 f のもとでの一種の減衰運動と見なすことができる。

2) 適当な力 f を選ぶと、(2)式の形をもつ方程式は、類似の乱雑解をもつことが示される。

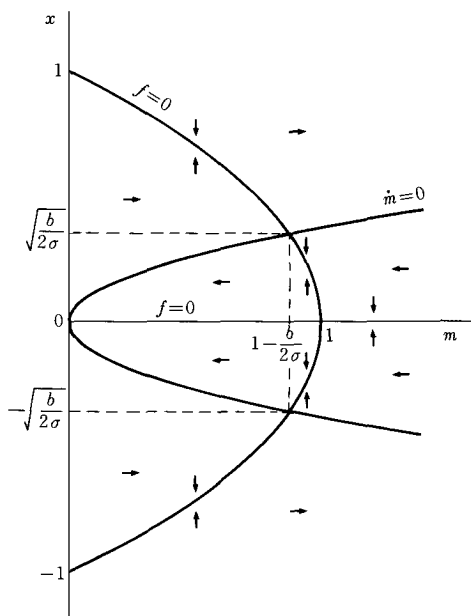
これらのことを理解するために、 $x-m$ 面での運動を考えよう。図1(a)で2つの曲線は $\dot{m}=0$ および $f=0$ を意味している。また図1(a)での垂直な矢印は力 f の方向を示し、水平な矢印は m による方向を示している。さらに図中で、 $\dot{m}=f=0$ を満す3点 $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{b/2\sigma}, 1-b/2\sigma)$ はローレンツモデルの3つの固定点に相当している。この図1(a)から $x-m$ 面での軌道を容易に推測することができる。これらの要件から、類似の解をもつ異なった力 f をもつモデルを作ることができる⁷⁾。次式はその一例である(図1(b))。

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = -\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\dot{x}(\tau) + f \\ \dot{m}(\tau) = \varepsilon\left[-\frac{b}{\sigma}m(\tau) + \left(2 - \frac{b}{\sigma}\right)x(\tau)^2\right] \end{cases} \quad (3)$$

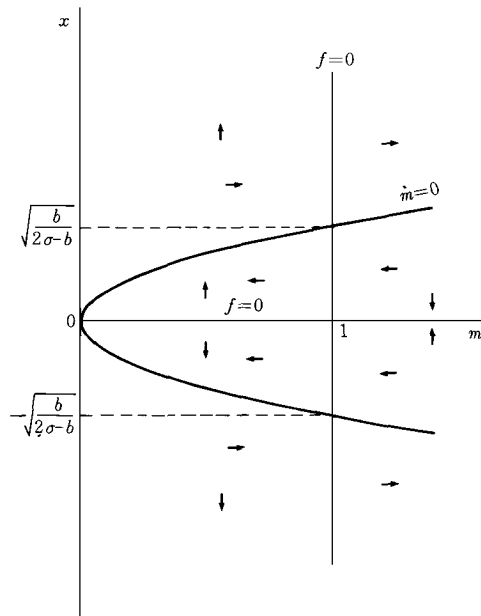
ただし、 $f = -x(\tau)[m(\tau)-1]/\sigma$ である。

このモデルでは(2)式の f で $x(\tau)$ の2乗の項が取り除かれている。

別の注目すべき点は、 \dot{m} は ε に比例しているが、力 f は ε あるいはレーリー数 r に依存しないことである。そ



(a)



(b)

図1 $x-m$ 面のダイアグラム

のため、もしパラメータ ε を適当な値に設定することによって、リミットサイクルのような閉軌道を得ることが期待できる。さらにパラメータ ε を変化させると、次の

周期解が得られる。乱雑なふるまいは、その2つの閉軌道の間にパラメータを設定した場合に現われる。この様相を確認するために、レーリー数 r の広い範囲にわたっ

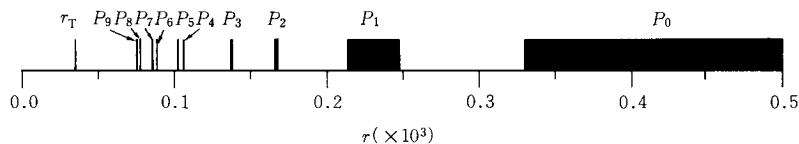


図2 解の r 依存性 (ローレンツモデル)

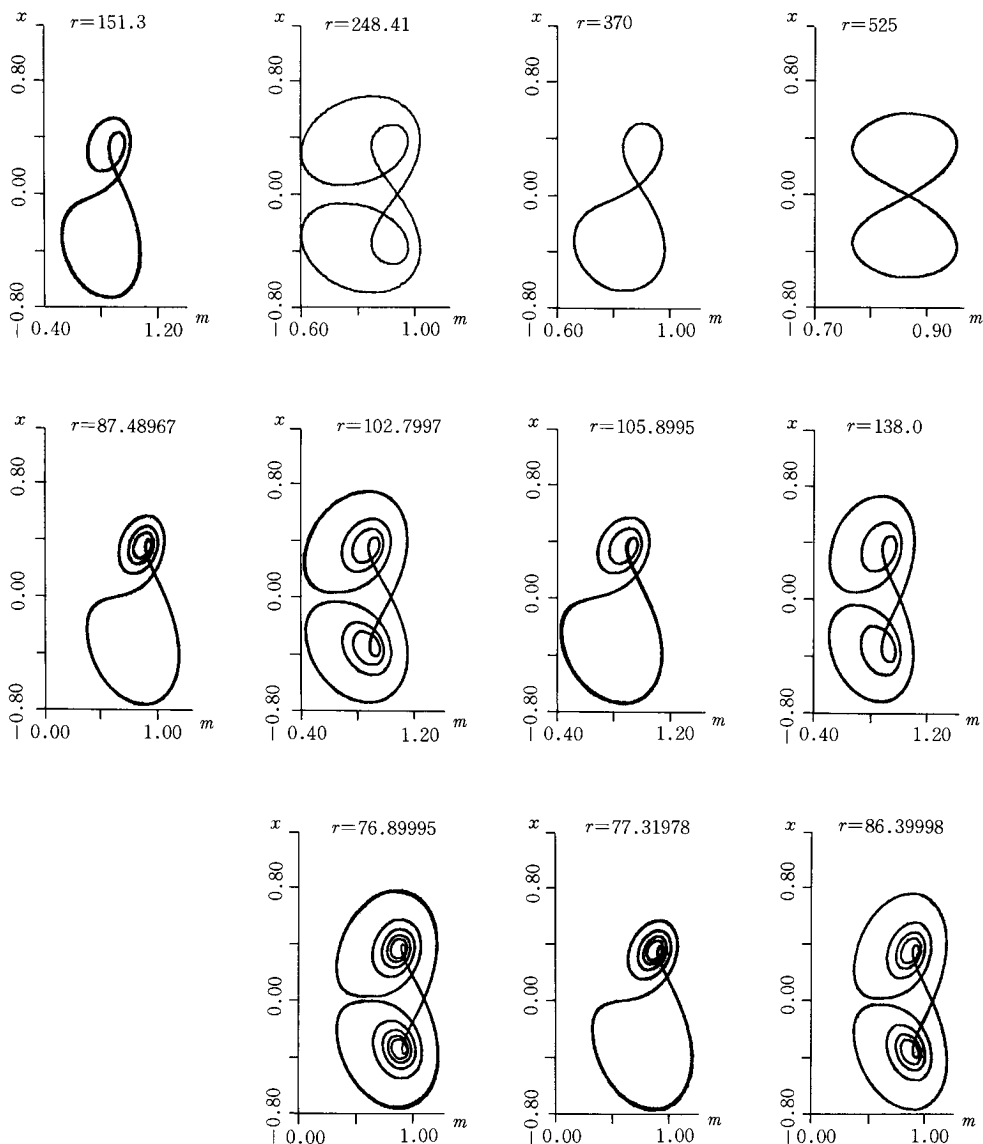


図3 リミットサイクルの形 (ローレンツモデル)

てコンピュータシミュレーションを行なった。

3. ローレンツ方程式のコンピュータシミュレーション

3-1 周期的領域と乱流領域⁸⁾

パラメータ σ, b をそれぞれ $\sigma = 16, b = 4$ に固定し、パラメータ r を変化させて解の性質を調べた。その結果

を図2に示す。図2の中で P_0, P_1, P_2, \dots の領域では、解のふるまいは周期的であり、安定なリミットサイクルが存在する。これらの領域は周期的領域と名づける。2つの周期的領域の間の領域(乱流領域と呼ぶ)では、解の時間特性は非周期的(乱雑な)ふるまいを示す。2節で指摘したように、乱雑な解と周期的な解が交互に現われることが明らかになった。

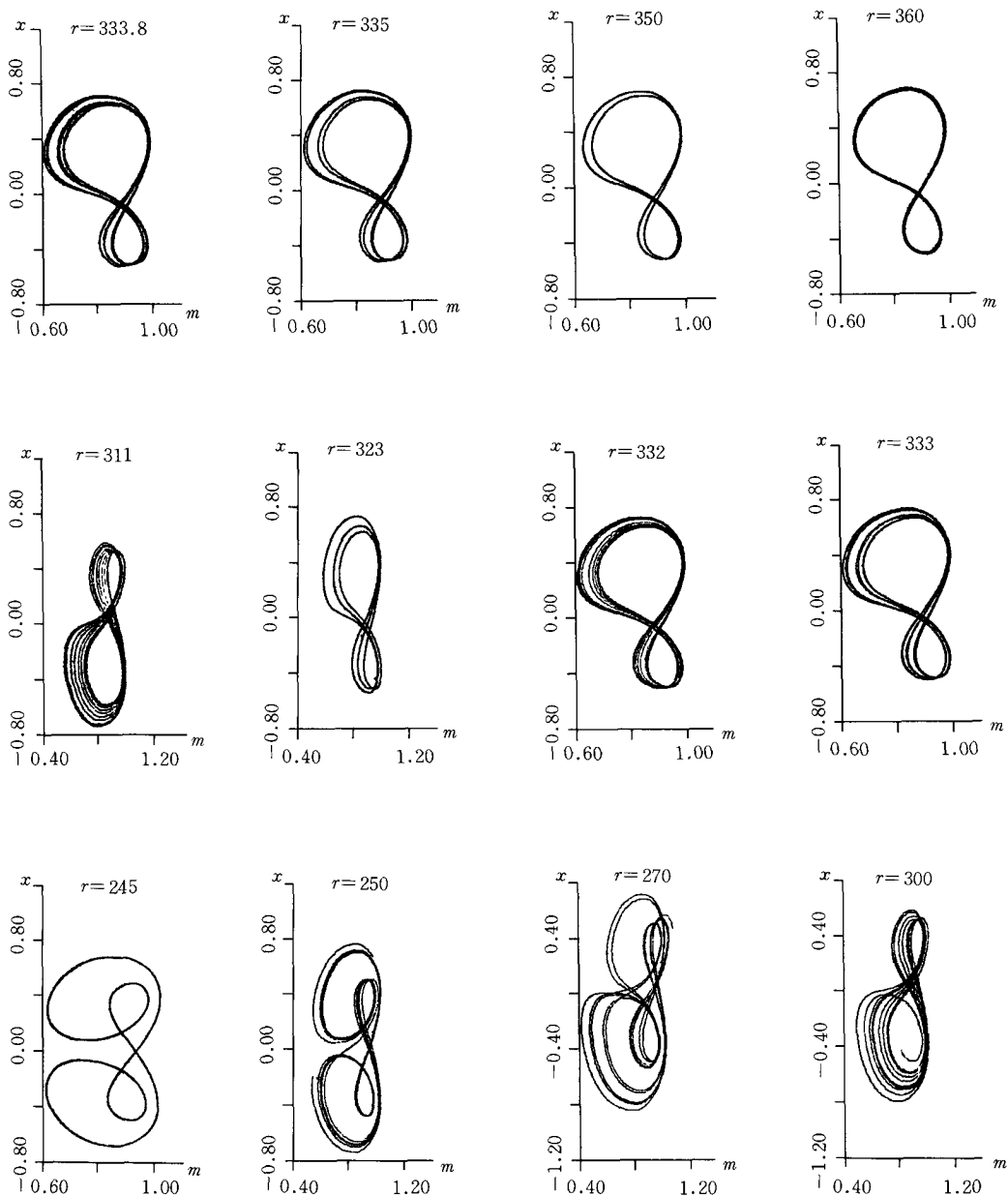


図4 リミットサイクルの枝分れ(ローレンツモデル)

3-2 リミットサイクルの形⁹⁾

図3は各周期的領域における $x-m$ 面での基本的なリミットサイクルの形を示したものである。この基本的なリミットサイクルは、もし r を減少させると周期が倍々になる枝分れを示す。 $r = 500$ 以上では、常に一つの安定なリミットサイクルが存在している。また図3を見てわかることは、リミットサイクルの形は規則正しい仕方で変化していることである。 $x = 0$ の軸に関して、対称形と非対称形が交互に現われる。もし対称なリミットサイクルあるいは非対称なリミットサイクルに注目すれば、最初1重のリミットサイクルが現われ、次に2重のリミットサイクル、さらに3重のリミットサイクル、…のように次々と出現する。

3-3 リミットサイクルの枝分れ

次に図2の P_0 から P_1 への領域におけるリミットサイクルの枝分れについて観察する。 P_0 領域の対称なリミットサイクルは、 r を減少させて行くと2つの非対称リミットサイクルに枝分れする。図4は、その1つを示したものである。最初に2倍周期をもつ枝分れが生じ、さらに4倍周期、8倍周期、……のように枝分れが発生する。そして枝分れが収束して、軌道は最終的に乱雑となる。これはMayのいうピッチホーク型枝分れ⁹⁾に相当している。さらに r を減少させて行くとタンジェント型枝分れ⁹⁾に相当する3周期のリミットサイクルが現われる。続いて r を減少させると、軌道は再び乱雑となり、次の周期的領域 P_1 にはいる。この乱雑な解から周期的な解への転移の際には間欠性を観察することができる¹⁰⁾。

3-4 リミットサイクルの近似解⁹⁾

高レーリー数に対して(ε は小さな値となり)、非線形振動論におけるリンドステートの方法¹¹⁾を用いて、ローレンツ方程式を解くことができる。実際に ε の1次の項までで、リミットサイクルの近似解を計算すると次式のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a \cdot cn(t' + \theta', k) + \varepsilon y_1(t') + O(\varepsilon^2), \\ m(\tau) &= c + \varepsilon q_1(t') + O(\varepsilon^2) \\ t' &\equiv \omega\tau, \omega = 4K/T + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2) \\ y_1(t') &= \frac{C_1}{dn(K)} dn(t' + K) sn(t' + K) + a \left(\frac{T'}{4K} \right)^2 \\ &\quad \times \left[- \left(\frac{J}{2\sigma} - B \right) cn(t' + K) dn^2(t' + K) zn(t' + K) \right. \\ &\quad \left. + k^2 \left(\frac{J}{2\sigma} + B \frac{k^2}{1-k^2} \right) sn^2(t' + K) cn(t' + K) \right. \\ &\quad \left. \times zn(t' + K) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{J}{2\sigma} + \frac{1}{2} B \frac{2k^2-1}{1-k^2} \right) sn(t' + K) dn(t' + K) \right. \\ &\quad \left. \times (zn^2(t' + K) + k^2(sn^2(t' + K) - 1)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \left(\frac{J}{2\sigma} \left(\frac{2E}{K} - 1 \right) + B \left(\frac{2k^2-1}{1-k^2} \cdot \frac{E}{K} + 1 \right) \right) \\ &\quad \times sn(t' + K) dn(t' + K) (\log dn(t' + K) \\ &\quad - \log dn(K) + \int_0^{t'} zn(t'' + K) dt'') \end{aligned}$$

$$q_1(t') = J \cdot zn(t' + K, k), \quad \omega_1 = 0, \quad (4)$$

ここで K : 第1種完全楕円積分, E : 第2種完全楕円積分, $sn(t)$, $cn(t)$, $dn(t)$; ヤコビ楕円関数, $zn(t)$: ヤコビ ζ 関数,

$$k = a/\sqrt{2|a^2-1+c|}, \quad T' = 4Kk\sqrt{2\sigma}/a,$$

$$J = [(2-b/\sigma)a^2k^2](T/4K),$$

$$C_1 = a \cdot dn(K) \left(\frac{T'}{4K} \right)^2 \left[\left(\frac{J}{2\sigma} - B \right) \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right.$$

$$\left. - k^2 \left(\frac{J}{2\sigma} + \frac{1}{2} B \frac{2k^2-1}{1-k^2} \right) \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{J}{2\sigma} \left(\frac{2E}{K} - 1 \right) + B \left(\frac{2k^2-1}{1-k^2} \cdot \frac{E}{K} + 1 \right) \right\} (\log dn(K) \right.$$

$$\left. - \int_0^K zn(t' + K) dt' \right],$$

$$B = - \frac{T'}{4K} \cdot \frac{1}{\sigma k^2} \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) (1-c) + \frac{bc}{2\sigma} \right.$$

$$\left. + \left(3 - \frac{1}{\sigma} - \frac{b}{\sigma} \right) \frac{a^2}{3} \left(\frac{1}{k^2} - 2 \right) \right]$$

である。

なお、定数 a, c は次式から決定される。

$$- \frac{b}{\sigma} c + \left(2 - \frac{b}{\sigma} \right) \frac{a^2}{k^2} \left(\frac{E}{K} - 1 + k^2 \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) a^4 \frac{1-k^2}{k^2} + \left(\frac{bc}{2\sigma} + \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) (1-c) \right)$$

$$\times \frac{a^2}{k^2} \left(\frac{E}{K} - 1 + k^2 \right) - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{b}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{a^4}{3k^4}$$

$$\times \left[(2-3k^2)(1-k^2) + (4k^2-2) \frac{E}{K} \right] = 0 \quad (5)$$

この結果は図5に示されている。図5で・印は理論解を示し、実線はコンピュータシミュレーションの結果を示している。両者は良く一致している。しかしながら、それ以上の研究をする場合、例えば対称リミットサイクルが非対称リミットサイクルになることや、2倍周期をもつ枝分れ等をローレンツモデルで研究することは(4)式で明らかなようにヤコビの楕円関数が現われるので、計算が非常に複雑になる。それ故、(3)式に示した新しいモデルを採用し、乱雑挙動に到る逐次的な枝分れを議論する。そこでは、ヤコビの楕円関数に代って三角関数が現われる。しかしながら、ここで議論する方法はローレンツモデルにも適用できる。

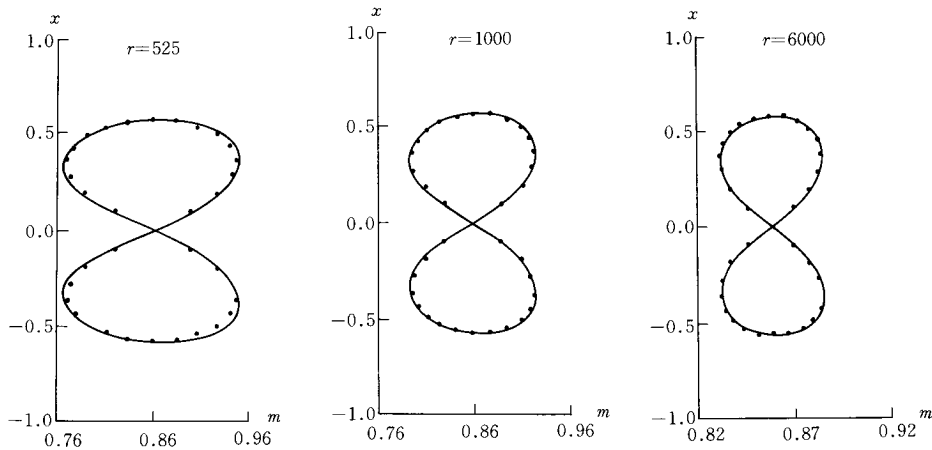


図5 リミットサイクルの形についてのシミュレーションと理論の比較 (ローレンツモデル)

4. 新しいモデル⁷⁾

4-1 コンピュータシミュレーションの結果

前に述べたように、ここでは(3)式で与えられる新しいモデルの枝分れについて考察する。このモデルの解は高レーリー数あるいは小さな ε において、ローレンツモデルと類似の枝分れを示す。最初に対称リミットサイクルが2つの非対称リミットサイクルに枝分れし、さらに非対称リミットサイクルはローレンツモデルのように2倍周期をもつリミットサイクルに枝分れする。そして、最後は乱雑なふるまいになる。これらの現象は図6に示されている。

4-2 周期解の計算⁷⁾

まず最初に、周期 T をもつ周期解 $x(\tau)$, $m(\tau)$ を見つけることにする。 $x(\tau)$ と $m(\tau)$ を定数項と残りの振動項に分解する。周期解は ε によって展開できると仮定して、リンドステートの方法を用いて ε の4次まで解を、計算した。この結果を次式に示す。

$$\begin{aligned} x(\tau) &= f + X(\tau), & \langle X(\tau) \rangle &= 0 \\ m(\tau) &= g + M(\tau), & \langle M(\tau) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad \langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \dots$$

$$X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(\tau), \quad M(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n M_n(\tau)$$

$$X_0(\tau) = a \cos(t'), \quad M_1(\tau) = \sum_{n=1}^2 B_1^{(n)} \sin(nt'),$$

$$X_1(\tau) = \sum_{n=2}^3 A_1^{(n)} \sin(nt'), \quad M_2(\tau) = \sum_{n=1}^4 B_2^{(n)} \cos(nt'),$$

$$X_2(\tau) = \sum_{n=1}^5 A_2^{(n)} \cos(nt'), \quad M_3(\tau) = \sum_{n=1}^6 B_3^{(n)} \sin(nt'),$$

$$X_3(\tau) = \sum_{n=2}^7 A_3^{(n)} \sin(nt'), \quad M_4(\tau) = \sum_{n=1}^8 B_4^{(n)} \cos(nt'),$$

$$X_4(\tau) = \sum_{n=1}^9 A_4^{(n)} \cos(nt'),$$

$$t' = \omega\tau, \quad \omega = \sqrt{\frac{g-1}{\sigma}} + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^4 \omega_4 + \dots, \quad T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \quad (6)$$

定数 f , g そして振幅 a は永年項を消去するための、次の3つの方程式によって決定される。

$$a^2 = 8 \frac{\sigma+1}{2\sigma-b} (g-1) - 16f^2,$$

$$g = \left(\frac{2\sigma-1}{b} \right) [f^2 + \langle X(\tau)^2 \rangle], \quad (7)$$

$$f(g-1) + \langle X(\tau)M(\tau) \rangle = 0$$

定数 f は対称リミットサイクルから非対称リミットサイクルへの転移の秩序パラメータと見なすことができる。なぜなら対称リミットサイクルの場合 f は零で、非対称リミットサイクルの場合は零でない有限値を持つからである。 $\sigma = 16$, $b = 4$ として(7)式を解いた結果を図7に示す。 $r_c = 2084$ より大きい r では f は零で、 r_c より小さい r では f は3実根をもつ。その1根は零で、他の2根は零でない有限値である。この f の r 依存性はコ

表1 周期 T の r 依存性

r	シミュレーション	理 論
1700	97.4	97.3
1800	98.1	98.1
1900	98.9	98.9
2000	99.6	99.7
2100	100.3	100.4
2200	100.4	100.4

ンピュータシミュレーションの結果と一致している。 r_c より小さい r で f が零の解は不安定となり、零でない f の解は安定となる。2つの解(f が正と f が負)は2つの非対称リットサイクルに相当する。(6)式を用いて計算したリットサイクルの周期 T の r 依存性は表1に

与えられていて、シミュレーションの結果とよく一致している。図8は(6)式を用いて計算したリットサイクルの形とコンピュータシミュレーションの結果とが比較されている。図8で実線はコンピュータシミュレーションの結果を示し、理論の結果は+印の中心によって示す。

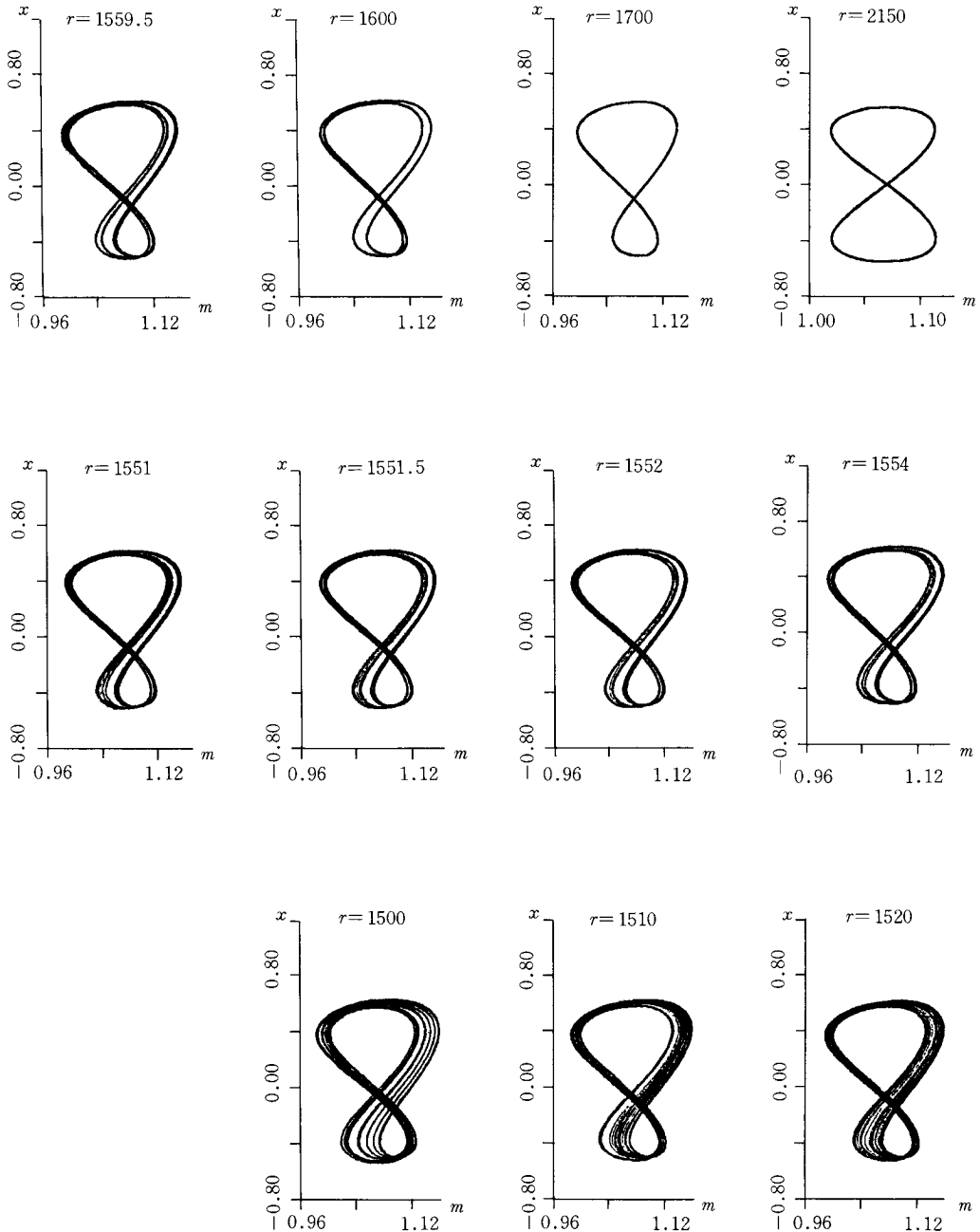


図6 リットサイクルの枝分れ(新しいモデル)

両者は非常に良く一致している。

次に2倍周期をもつ枝分れについて議論する。周期
 $2T$ をもつ周期解は、次の形をもつものと仮定する。

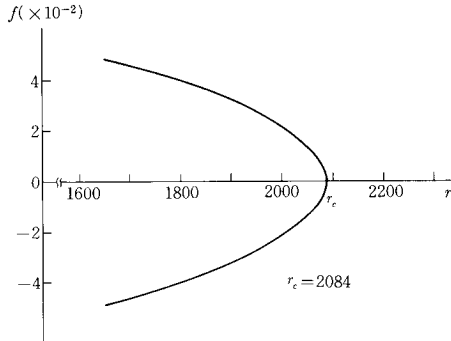


図7 秩序パラメータ f の r 依存性 (新しいモデル)

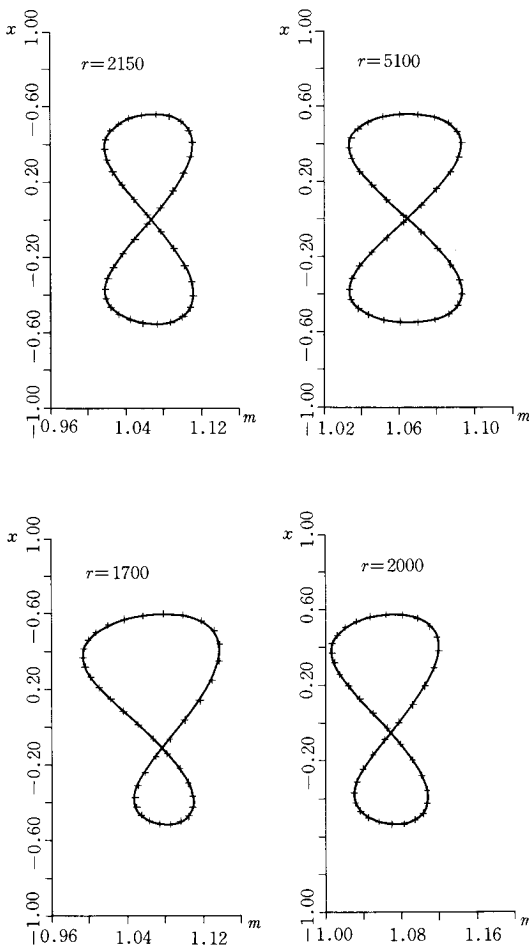


図8 リミットサイクルの形についてのシミュレーションと理論の比較 (新しいモデル)

$$x(\tau) = f + X(\tau) + \xi(\tau),$$

$$m(\tau) = g + M(\tau) + \eta(\tau). \quad (8)$$

ここで、 $X(\tau)$ と $M(\tau)$ は(6)式と同じ形をもつと仮定する。その時、 $\xi(\tau)$ と $\eta(\tau)$ は次に示す方程式に従う。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(\tau) = & -\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) \dot{\xi}(\tau) - \frac{1}{\sigma} [f\eta(\tau) + (g-1)\xi(\tau) \\ & + X(\tau)\eta(\tau) + M(\tau)\xi(\tau) + \xi(\tau)\eta(\tau) \\ & - \langle X(\tau)\eta(\tau) \rangle - \langle M(\tau)\xi(\tau) \rangle - \langle \xi(\tau)\eta(\tau) \rangle], \\ \dot{\eta}(\tau) = & \varepsilon \left[-\frac{b}{\sigma}\eta(\tau) + \left(2 - \frac{b}{\sigma} \right) \{ \xi(\tau)^2 + 2f\xi(\tau) \right. \\ & \left. + 2X(\tau)\xi(\tau) - \langle \xi(\tau)^2 \rangle - 2\langle X(\tau)\xi(\tau) \rangle \} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

この場合、 a, g そして f を決定する条件は(7)式の代わりに、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a^2 = & 8 \frac{\sigma+1}{2\sigma-b} (g-1) - 16f^2, \\ g = & \left(\frac{2\sigma}{b} - 1 \right) [f^2 + \langle X(\tau)^2 \rangle + 2\langle X(\tau)\xi(\tau) \rangle \\ & + \langle \xi(\tau)^2 \rangle], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f(g-1) + \langle X(\tau)M(\tau) \rangle + \langle M(\tau)\xi(\tau) \rangle \\ + \langle X(\tau)\eta(\tau) \rangle + \langle \xi(\tau)\eta(\tau) \rangle = 0. \end{aligned}$$

そして、(9)式を調和平衡法を用いて解いた。

$$\begin{aligned} \xi(\tau) = & A_1^{(1)} \cos \left(\frac{1}{2} t' \right) + A_1^{(3)} \cos \left(\frac{3}{2} t' \right) \\ & + B_1^{(1)} \sin \left(\frac{1}{2} t' \right) + B_1^{(3)} \sin \left(\frac{3}{2} t' \right), \\ \eta(\tau) = & A_2^{(1)} \cos \left(\frac{1}{2} t' \right) + A_2^{(3)} \cos \left(\frac{3}{2} t' \right) \\ & + B_2^{(1)} \sin \left(\frac{1}{2} t' \right) + B_2^{(3)} \sin \left(\frac{3}{2} t' \right). \end{aligned} \quad (11)$$

$r = 1650$ において a, g, f と各係数は表2のような値をもっている。そして、コンピュータシミュレーションの結果と理論的結果の比較は図9に示されている。図9で

表2 2倍周期をもつ解の係数値

$$r = 1650, \sigma = 16, b = 4$$

係数	値	係数	値
a	0.5397	$A_2^{(3)}$	-0.6345×10^{-2}
g	1.0673	$B_1^{(1)}$	0.2127×10^{-1}
f	0.04728	$B_1^{(3)}$	0.1669×10^{-1}
$A_1^{(1)}$	0.2095×10^{-2}	$B_2^{(1)}$	0.5165×10^{-2}
$A_1^{(3)}$	0.3344×10^{-2}	$B_2^{(3)}$	0.5536×10^{-2}
$A_2^{(1)}$	0.1006×10^{-2}		

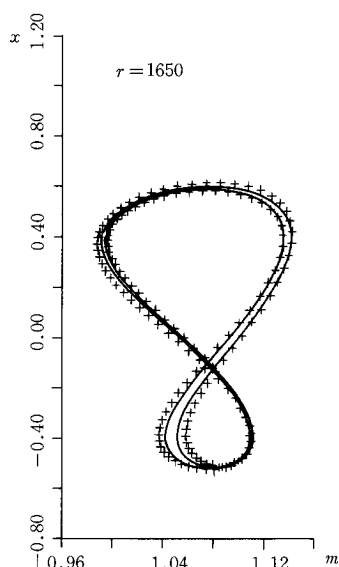


図9 2倍周期をもつリミットサイクルの形についてのシミュレーションと理論の比較 (新しいモデル)

両者の不一致は(11)式の $\xi(\tau)$ と $\eta(\tau)$ の近似が粗いためであると考えられる。もし、より高次の成分を考慮するならば、例えば $5/2$, $7/2$ 周波数成分を考慮すれば良い一致が得られるであろう。さらに、このような手続きを繰返してゆけば、当然周期が倍々となるピッチフォーク型の枝分れ現象を説明することが可能である。

5. 新しいモデルでのストレンジアトラクタの構造

最後に、ストレンジアトラクタの構造について考える。位相空間 (m, x, p) を考える。ここでは $p = \dot{x}$ とする。乱雑挙動中の軌道はストレンジアトラクタと呼ばれる位相空間の特定の領域に閉じこめられている。ローレンツモデルの場合には、ストレンジアトラクタは2次元

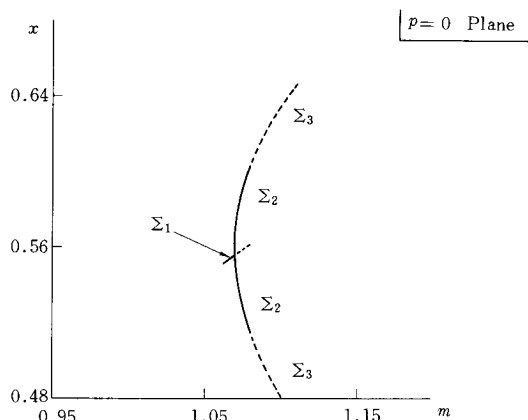


図10 多様体と $p=0$ 面との交線 (新しいモデル)

多様体と Cantor 集合の積として局所的に表現される¹²⁾。もし厚さについての Cantor 集合の構造を無視すれば、ストレンジアトラクタは近似的に2次元多様体で表現できる。(3)式で示されるモデルの場合にも、コンピュータシミュレーションの結果によれば、この種の2次元多様体が存在する。そして前述したリミットサイクルは、この多様体上についている様に見える。それ故、これらのリミットサイクルを含む多様体を考える。 Σ_1 は全ての安定な対称リミットサイクルを含む多様体とする。 Σ_2 は周期1の全ての安定な非対称リミットサイクルを含む多様体とする。 Σ_3 は周期1の不安定なリミットサイクルを含む多様体とする。もし、周期2, 4, 8, ……をもつリミットサイクルの形についての詳細を知ることができれば、その時 Σ_3 は正確な多様体によって置き換えられるべきである。図10はリミットサイクルの解析形である(6)式を用いることによって計算した Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 と $p=0$ 面との交線を表わしている。 $p = \dot{x}$ であるから、 x はその最大値あるいは最小値をもつ点 (x, m) の集合によって与えられる。これとコンピュータシミュレーションから得られる $p=0$ 面のポアンカレマップとが図11で比較

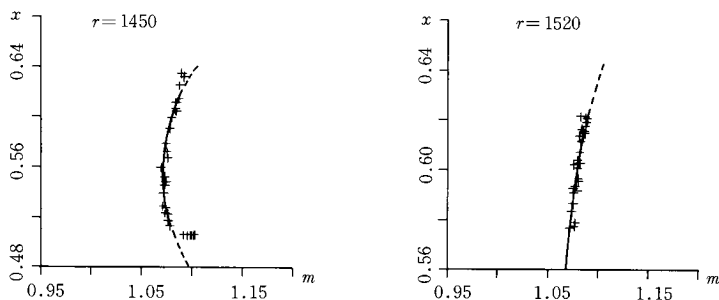


図11 ポアンカレマップと理論との比較 (新しいモデル)

されている。図11でシミュレーションの結果は+印で示され、理論の結果は実線で示されている。両者はよく一致していることがわかる。それ故、ストレンジアトラクタは局所的にこの多様体によって、近似的に表現されることがわかる。

6. ま と め

本論文では、高レリー数領域で、ローレンツモデル及び新しいモデルをリンドステートの方法を用いて解き、乱雑解に到るリミットサイクルの枝分れを理論的に調べた。その結果はコンピュータシミュレーションの結果とよく一致している。

ここで調べられた乱雑挙動の問題で最も重要なものは、ストレンジアトラクタ上での定常分布が存在するか否かということと、存在すればどのような分布かということである。これらの問題はストレンジアトラクタの構造を、より正確に知ることによって可能なように思われる。

他の重要な点は、これらの現在の利用価値をさがすことである。例えば、ローレンツ方程式や新しいモデルに対応する電気回路等において、乱雑な解の特性又は逐次枝分れの特性の実用面を調べることは有用なことのようと思われる。

最後にプログラム作成に協力いただいた電気工学科技術職員野田雅美氏に深く感謝する。またコンピュータ処理は、本学電子計算機センターの FACOM 230-38 を使用した。

(原稿受付 昭和55年9月20日)

参 考 文 献

- 1) J. P. Gollub and H. L. Swinney: Phys. Rev. Lett. **35**, 927 (1975). G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. **33**, 1185 (1974). M. Dubois and P. Berge, "Synergetics", Far from equilibrium, Ed. by Pacault, C. Vidal (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979) p. 85.
- 2) R. M. May: Theoretical ecology; Principles and applications (Blackwell, Oxford, 1976).
- 3) O. E. Rossler: "Synergetics", Far from equilibrium, Ed. by A. Pacault, C. Vidal (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979) p. 107.
- 4) Y. Ueda: J. Stat. Phys. **20**, 181 (1979).
- 5) E. N. Lorenz: J. Atmo. Sci. **20**, 130 (1963).
- 6) T. Shimizu and N. Morioka: Phys. Lett. **66A**, 181, 447 (1978); **69A**, 148 (1978).
- 7) T. Shimizu and N. Morioka: Phys. Lett. **76A**, 201 (1980).
- 8) R. M. May: Nature **261**, 459 (1976).
- 9) T. Shimizu: Physica **97A**, 383 (1979); Phys. Lett. **69A**, 379 (1979); **71A**, 319 (1979).
- 10) P. Manneville and Y. Pomeau: Phys. Lett. **75A**, 1 (1979) and Physica D.
- 11) D. W. Jordan and P. Smith: Nonlinear ordinary differential equations (Clarendon Press, Oxford, 1977).
- 12) D. Ruelle and F. Takens: Comm. Math. Phys. **20**, 167 (1971).